(1)

جامعة البعث	امتحانات الدورة الإضافية للعام الدراسي 2013 / 2014	
كلية العلوم	المادة: نظرية القياس – السنة الثالثة رياضيات	بتول
قسم الرياضيات	العلامة: 100 درجة. المدة: ساعة ونصف. اسم الطالب:	

السؤال الأول (24 درجة): ٨ × ٣ = ٢٤

ضع كلمة صح أو خطأ لكل من العبارات التالية وصحح العبارات الخاطئة :

- (1) جبر بوريل $\mathcal{B}(X)$ هو σ – الجبر المولد بصف المجموعات المفتوحة في X.

(2) كل مجموعة قيوسة حسب لبيغ تكون اما منتهية أو محدودة .

(3) تكون الدالة المميزة I_A قيوسة إذا وفقط كانت المجموعة A قيوسة.

(4) مجموعة كانتور C هي مجموعة قيوسة حسب لبيغ وغير عدودة وقياسها $\lambda(C)=0$.

(5) الحلقة المولدة بنصف حلقة $\mathcal{H}$ لها الشكل :

$$k(\mathcal{H})=\left\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i : n\in N\ ,\ A_i\in H\ ,\ A_i\cap A_j=\phi\ ;\ i\neq j\right\}.$$

(6) كل نصف حلقة هي نصف جبر وكل حلقة هي جبر .

(7) الصف $\{\phi, A, A^c, X\}$ يشكل σ – جبر على أي مجموعة X (حيث A مجموعة جزئية من X).

(8) المجموعة الخالية ϕ قيوسة بحسب أي قياس خارجي بينما المجموعة الكلية X ليست بالضرورة قيوسة.

السؤال الثاني (26 درجة):

— (أ) عرف كلاً من : القياس – القياس الخارجي – المجموعة القيوسة . ٢ × ٣ = ٦

— (ب) بفرض μ^* قياساً خارجياً على المجموعة X ، أثبت أن صف المجموعات القيوسة M_{μ^*} يشكل σ – جبر على X . ١٤

— (ج) هل يشكل المقصور $\mu^*\big|_{M_{\mu^*}}$ قياساً ؟ وعلى من ؟ ٦

السؤال الثالث (25 درجة):

— (أ) عرف الدالة القيوسة واذكر شرطاً مكافئاً للتعريف . ٥ + ٥ = ١٠

(ب) أثبت أن الدوال التالية قيوسة على المجموعة $E=[0,1]$:

$$f(x)=\sin x+25.\ ,\ g(x)=\begin{cases}1\ ;\ x\in[0,1]\cap Q\\ 0\ ;\ x\in[0,1]\setminus Q.\end{cases}\ ,\ f(x)+g(x).$$

٣ × ٥ = ١٥

السؤال الرابع (25 درجة):

— (أ) عرف تكامل لبيغ لكل من: الدالة البسيطة غير السالبة . الدالة القيوسة والمحدودة . الدالة القيوسة وغير السالبة. ٣ × ٥ = ١٥

(ب) احسب تكامل لبيغ للدوال التالية على المجموعة $E=[0,5]$:

$$f(x)=\begin{cases}1\ ;\ 0\le x\le 1\\ 0\ ;\ 1<x\le 5.\end{cases}\ ,\quad g(x)=\begin{cases}x+1\ ;\ 0\le x\le 1\\ (x-1)^2\ ;\ 1<x\le 5.\end{cases}$$

٢ × ٥ = ١٠

مع التمنيات بالتوفيق والنجاح   مدرس المادة: د. إبراهيم إبراهيم

(٢)

سلم التصحيح لمادة نظرية القياس / سنة ثالثة رياضيات
الدورة الإضافية للعام ٢٠١٣ / ٢٠١٤ م

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

جواب السؤال الأول (٢٤ درجة):

(١) صح
(٢) خطأ: قد تكون منتهية أو معدودة أو غير ذلك.
(٣) صح.
(٤) صح.
(٥) صح.
(٦) خطأ: كل نصف جبر هو نصف حلقة وكل جبر هو حلقة.
(٧) صح.
(٨) خطأ: كل من ϕ و X مجموعة قيوسة بحسب أي قياس خارجي لأن $\phi = X^c$.

جواب السؤال الثاني (٢٦ درجة):

(أ) القياس: هو دالة مجموعة:

$$\mu : \mathcal{H} \longrightarrow [0, +\infty] \; ; \; A \longmapsto \mu(A)$$

تحقق ما يلي: ① $\mu(\phi) = 0$

② إذا كانت $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{H}$ منفصلة مثنى مثنى و $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{H}$ فإن

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

القياس الخارجي: هو دالة مجموعة:

$$\mu^* : 2^X \longrightarrow [0, +\infty] \; ; \; A \longmapsto \mu^*(A)$$

تحقق ما يلي: ① $\mu^*(\phi) = 0$

② إذا كانت $A \subset B \Leftarrow \mu^*(A) \le \mu^*(B)$

③ إذا كانت $A_1, A_2, \ldots \in 2^X$ فإن $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$.

المجموعة القيوسة: تكون المجموعة E قيوسة حسب μ^* إذا كان:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \quad ; \; \forall A \in 2^X.$$

ب) ① معلوم أن كلاً من ϕ و X قيوسة حسب $\boxed{\mu^*}$ ⟸ $X, \phi \in \mathcal{M}_{\mu^*}$.

② إذا كانت $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ ، أي أن A_i مجموعات قيوسة ، ⟸ $\forall i\ A_i$ مجموعة قيوسة (يجب مبرهنة) ⟸ $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ ؛

③ يمكن ذكر أحد الشرطين التاليين:

~~١- إذا كانت $A, B \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ فإن~~ $A \setminus B \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ ⟵ $\mathcal{M}_{\mu^*}$ محققة فيها X

أو ٢- إذا كانت $A \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ فإن $A^c \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ وهذا محقق لأن متممة المجموعة القيوسة تكون بدورها قيوسة. ⟸ $\mathcal{M}_{\mu^*}$ يشكل σ-جبر.

ج) المقصود $\mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}$ يشكل قياساً ... على $\mathcal{M}_{\mu^*}$.

جواب السؤال الثالث (٢٥ درجة) :

$\boxed{\text{أ)}}$ تكون الدالة f قيوسة على E إذا كانت المجموعة $E(f>c)$ قيوسة من أجل أي عدد حقيقي c.

$\boxed{\text{شرط مكافئ}}$: إحدى المجموعات $E(f \geq c)$ ، $E(f<c)$ ، $E(f \leq c)$ قيوسة من أجل أي عدد c.

$\boxed{\text{ب)}}$ الدالة f مستمرة فهي قيوسة (مبرهنة)

الدالة g هي دالة ديريخليه وهي قيوسة لأنه من أجل أي عدد c لدينا:

$$E(g>c) = \begin{cases} [0,1] & ; \ c<0 \\ [0,1] \cap \mathbb{Q} & ; \ 0 \leq c \leq 1 \\ \phi & ; \ c>1 \end{cases}$$

الدالة $f+g$ هي دالة قيوسة لأنه مجموع دالتين قيوستين هي دالة قيوسة (مبرهنة).

جواب السؤال الرابع (٢٥ درجة):

(٢) تكامل ليبيغ لدالة بسيطة وغير سالبة

$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot I_{A_i}$ هو العدد:

$$\int_E \varphi d\lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \lambda(A_i)$$

تكامل ليبيغ للدالة القيوسة والمحدودة:

نفرض $\lambda(E) < +\infty$ ونعرف تكامل ليبيغ الأعلى والأدنى للدالة f بالشكل:

$$(\overline{L})\int_E f d\lambda = \inf\left\{\int_E \varphi d\lambda : \varphi \text{ دالة بسيطة و } \varphi \geq f\right\},$$

$$(\underline{L})\int_E f d\lambda = \sup\left\{\int_E \psi d\lambda : \psi \text{ دالة بسيطة و } \psi \leq f\right\}.$$

عندئذ تكون الدالة f كمولة على E إذا كان:

$$(\overline{L})\int_E f d\lambda = (\underline{L})\int_E f d\lambda.$$

تكامل ليبيغ للدالة القيوسة وغير السالبة:

$$\int_E f d\lambda = \sup\left\{\int_E h d\lambda : h \text{ دالة قيوسة ومحدودة على } E \ ; \ \lambda(E(h \neq 0)) < \infty\right\}$$

(ب) احساب التكاملات:

الدالة f بسيطة وهي قيوسة ومحدودة وتكاملها:

$$\int_E f d\lambda = 1 \cdot \lambda([0,1]) + 0 \cdot \lambda((1,5]) = 1 \cdot 1 + 0 = 1.$$

الدالة g كمولة حسب ريمان فهي كمولة حسب ليبيغ ويكون:

$$(L)\int_E g d\lambda = (R)\int_0^5 g(x)dx = \int_0^1 (x+1)dx + \int_1^5 (x+1)^2 dx =$$

$$= \frac{(x+1)^2}{2}\Big]_0^1 + \frac{(x+1)^3}{3}\Big]_1^5 = \frac{3}{2} + \frac{215}{3} = \frac{348}{6}.$$

مدرس المادة:

د. ابراهيم ابراهيم

(٥)

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الفصل الثاني للعام الدراسي 2013 / 2014
المادة: نظرية القياس – السنة الثالثة رياضيات
العلامة: 100 درجة.

اسم الطالب: بتول

السؤال الأول (25 درجة): ٥ × ٥ = ٠٢٥

العبارات التالية غير دقيقة ، مطلوب كتابتها بشكل صحيح ودقيق :

(1) يتألف جبر بورل من مجموعات مفتوحة أو مغلقة أو محدودة فقط .

(2) كل مجموعة قيوسة حسب ليبيغ تكون غير منتهية أو غير محدودة .

(3) تكون الدالة المميزة I_A دوماً قيوسة سواء كانت المجموعة A قيوسة أو لا .

(4) مجموعة كانتور C هي مجموعة قيوسة حسب ليبيغ وعدودة وقياسها $\lambda(C)=1$.

(5) الحلقة المولدة بنصف حلقة $\mathcal{H}$ لها الشكل :

$$k(\mathcal{H})=\left\{\bigcup_{i=1}^{?} A_i : A_i \in H.\right\}.$$

السؤال الثاني (25 درجة):

(أ) عرف كلاً من : القياس – القياس الخارجي – المجموعة القيوسة . ٠٢ ٠٢ ٠٢

(ب) بفرض μ^* قياساً خارجياً على المجموعة X ، أثبت أن صف المجموعات القيوسة $\mathcal{M}$. يشكل σ – جبر على X . ٠١٠

(ج) هل يشكل المقصور $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ قياساً ؟ وعلى من ؟ (بدون إثبات) ٠٣ ٠٢

السؤال الثالث (25 درجة):

(أ) عرف الدالة القيوسة . ٠٥

(ب) أثبت أن الدوال التالية قيوسة على المجموعة $E=[0,1]$:

$$f(x)=x^2+2x-1. \quad , \quad g(x)=\begin{cases} 1 & ; \ x\in[0,1]\cap Q \\ 0 & ; \ x\in[0,1]\setminus Q. \end{cases}$$

٠١٠ ١٠

السؤال الرابع (25 درجة):

(أ) عرف تكامل ليبيغ لكل من : الدالة البسيطة غير السالبة – الدالة القيوسة والمحدودة – الدالة القيوسة وغير السالبة . ٠٣ ٠٣ ٠٣

(ب) احسب تكامل ليبيغ للدوال التالية على المجموعة المرافقة لكل منها :

$$g(x)=\begin{cases} 1 & ; \ -1\le x\le 0 \\ 2 & ; \ 0<x<5 \\ 5 & ; \ x=5. \end{cases} \quad , \quad h(x)=\begin{cases} x^2 & ; \ 0\le x\le 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & ; \ 1<x\le 10. \end{cases}$$

٠٨ ٠٨

مع التمنيات بالتوفيق والنجاح
حمص في 22 / 6 / 2014 .

مدرس المادة: د. إبراهيم إبراهيم

سلم التصحيح لمادة نظرية القياس / س ٣ رياضيات

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الفصل الثاني ٢٠١٣ / ٢٠١٤

السؤال الأول (٢٥ درجة):

(١) يتألف جبر بوريل من مجموعات مفتوحة ومغلقة ومحدودة وغير محدودة وغير مفتوحة وغير ذلك.

(٢) كل مجموعة مقيوسة حسب لبيغ قد تكون منتهية أو غير منتهية محدودة أو غير محدودة

(٣) تكون الدالة المميزة I_A مقيوسة إذا وفقط إذا كانت المجموعة A مقيوسة.

(٤) مجموعة كانتور C مقيوسة حسب لبيغ وقياسها $\lambda(C)=0$ وهي غير معدودة

(٥) الحلقة المولدة بنصف حلقة $\mathcal{H}$ لها الشكل:

$$k(\mathcal{H})=\left\{\bigcup_{i=1}^{n}A_i : A_i\in\mathcal{H},\ A_i\cap A_j=\phi,\ i\neq j,\ n\in\mathbb{N}\right\}$$

السؤال الثاني (٢٥ درجة):

(أ) القياس: هو دالة مجموعة

$$\mu : \mathcal{H}\longrightarrow(-\infty,+\infty]$$
$$A\longmapsto\mu(A)$$

يحقق ما يلي:

① $\mu(\phi)=0$

② إذا كانت $A_1,A_2,\ldots\in\mathcal{H}$ منفصلة مثنى مثنى و $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathcal{H}$ فإن

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$$

القياس الخارجي: هو دالة مجموعة

$$\mu^* : 2^X\longrightarrow(-\infty,+\infty]$$
$$A\longmapsto\mu^*(A)$$

تحقق ما يلي:

① $\mu^*(\phi)=0$

② $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i)$

③ $A\subset B \Rightarrow \mu^*(A)\leq\mu^*(B)$

المجموعة المقيوسة: تكون المجموعة E مقيوسة حسب μ^* إذا تحقق:

$$\mu^*(A)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\cap E^c)\ ;\ \forall A\in 2^X$$

$\phi\in \mathcal{M}_{\mu^*}$ مجموعة قيوسة وبالتالي

(ب) - نعلم أن ϕ

وبالتالي $X=\phi^c\in \mathcal{M}_{\mu^*}$.

- اذا كانت $A_1,A_2,\dots\in \mathcal{M}_{\mu^*}$ فيكون $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in \mathcal{M}_{\mu^*}$ حسب مبرهنة،

- اذا كانت $A,B\in \mathcal{M}_{\mu^*}$ فإن $A\setminus B\in \mathcal{M}_{\mu^*}$.

~~ليس بالضرورة $\mathcal{M}_{\mu^*}$ تحتوي X وعليه $X\in \mathcal{M}_{\mu^*}$~~.

أي أن $\mathcal{M}_{\mu^*}$ جبر-σ على X.

(جـ) المقصور $\mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}$ يشكل قياساً على $\mathcal{M}_{\mu^*}$.

السؤال الثالث (٢٥ درجة):

(أ) تكون الدالة f قيوسة اذا كانت المجموعة $E(f>c)$ قيوسة من أجل أي عدد حقيقي c (أو احدى المجموعات $E(f\geq c)$, $E(f<c)$, $E(f\leq c)$).

(ب) الدالة $f(x)=x^2+2x-1$ مستمرة على المجال $[0,1]$ فهي قيوسة..
(أو يمكن تطبيق التعريف).

. الدالة $g(x)$ هي دالة ديريخليه، حيث نجد من أجل أي عدد c:

$$E(g>c)=\begin{cases} E & ; c<0 \\ [0,1]\cap\mathbb{Q} & ; 0\leq c<1 \\ \phi & ; c\geq 1\end{cases}$$

المجموعات في الطرف الأيمن كلها قيوسة لذلك تكون المجموعة $E(g>c)$ قيوسة من أجل أي عدد حقيقي c وبالتالي الدالة g قيوسة.

السؤال الرابع (٢٥ درجة):

(أ) تكامل ليبيغ لدالة بسيطة وغير سالبة $\varphi=\sum_{i=1}^{n}a_i I_{A_i}$ هو:

$$\int_E \varphi\, d\lambda=\sum_{i=1}^{n}a_i\,\lambda(A_i)$$

تكامل ليبيغ للدالة القيوسة والمحدودة:

نفرض $\lambda(E)<\infty$ ونعرف تكامل ليبيغ الأعلى والأدنى للدالة f بالشكل،

$$(\overline{L})\int_E f\,d\lambda = \inf\left\{ \int_E \varphi(x)\,d\lambda : \varphi \text{ دالة بسيطة ، } \varphi \ge f \right\}$$

$$(\underline{L})\int_E f(x)\,d\lambda = \sup\left\{ \int_E \psi(x)\,d\lambda : \psi \text{ دالة بسيطة ، } \psi \le f \right\}$$

تكون الدالة f مكاملة إذا

$$(\overline{L})\int_E f(x)\,d\lambda = (\underline{L})\int_E f(x)\,d\lambda$$

تكامل ليبيغ للدالة المقيسة وغير السالبة

(ب)

$$\int_E f(x)\,d\lambda = \sup\left\{ \int_E h(x)\,d\lambda : h \text{ دالة مقيسة ومحدودة ، } h \le f \;;\; \lambda(E(h\neq 0)) < \infty \right\}$$

1)
$$\int_{[-1,5]} g(x)\,d\lambda = 1\cdot\lambda([-1,0]) + 2\cdot\lambda((0,5)) + 5\cdot\lambda(\{5\})$$
$$= 1\cdot(1) + 2\cdot(5) + 5\cdot 0 = 11$$

2)
$$(L)\int_{[0,10]} h(x)\,d\lambda = (R)\int_0^{10} h(x)\,dx = (R)\int_0^1 x^2\,dx + (R)\int_1^{10} \frac{1}{x^2}\,dx =$$
$$= \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 - \frac{1}{x}\Big]_1^{10}$$
$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{10} + 1 = \frac{37}{30}$$

(يمكن الحل بطرق أخرى).

الدالة h مكاملة حسب ريمان لذلك يكون تكامل ليبيغ لها = تكامل ريمان

مدرس المادة أ.د. ابراهيم ابراهيم

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الدورة الثالثة للعام الدراسي 2012 / 2013
المادة: نظرية القياس – السنة الثالثة رياضيات
العلامة: 100 درجة.

اسم الطالب:

سلم التصحيح

السؤال الأول (28 درجة):

(أ) اذكر تعريف كل من: نصف الحلقة، نصف الجبر، الحلقة، الجبر، مع إعطاء مثال عن كل منها. $4\times 3 = 12$ ، $4 \times 1 = 04$

(ب) لتكن N مجموعة الأعداد الطبيعية وليكن $H = 2^N$ صف كل المجموعات الجزئية في N.
أثبت أن H يشكل σ – حلقة 06 و σ – جبر على N. 06

السؤال الثاني (27 درجة):

لتكن الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ المعرفتين على المجموعة $E=[0,8]$ بالشكل:

$$f(x)=\begin{cases} 1 & ; \ 0\le x\le 1 \\ 2 & ; \ 1<x<2 \\ 3 & ; \ 2\le x\le 4 \\ 0 & ; \ 4<x<8 \\ 6 & ; \ x=8. \end{cases} \quad , \quad g(x)=\begin{cases} 1 & ; \ 0\le x\le 1 \\ 2 & ; \ 1<x\le 2 \\ 5 & ; \ 2<x<8 \\ 6 & ; \ x=8. \end{cases}$$

07

المطلوب: (أ) هل هذه الدوال بسيطة؟ وإذا كان الجواب "نعم" اكتب التمثيل الطبيعي لها. $2\times 3 = 06$

(ب) احسب التكاملات التالية:

$$\int_E f(x)\,d\lambda \ (06) \quad , \quad \int_E g(x)\,d\lambda \ (06) \quad , \quad \int_E [f(x)+g(x)]\,d\lambda. \ (06)$$

السؤال الثالث (21 درجة):

(أ) اذكر تعريف "الخاصة تقريبا في كل مكان". 05

(ب) أثبت أن الدالتين التاليتين متساويتان تقريبا في كل مكان على R: 08

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & ; \ x\in R\setminus N \\ 1 & ; \ x\in N. \end{cases} \quad , \quad g(x)=\begin{cases} x^2 & ; \ x\in R\setminus N \\ 10 & ; \ x\in N. \end{cases}$$

(ج) لتكن متتالية الدوال $\{f_n(x)\}$ المعرفة على المجال $[0,1]$ بالشكل: 08

$$f_n(x)=x^n \quad ; \quad x\in[0,1] \quad , \quad n=1,2,....$$

أثبت أن هذه المتتالية متقاربة تقريبا في كل مكان من الدالة $f(x)=0$.

السؤال الرابع (24 درجة):

أجب بكلمة صح أو خطأ وصحح الخطأ فيما يلي: $6\times 4 = 24$

(1) دالة ديريخليه غير كمولة حسب ريمان وغير كمولة حسب لبيغ.

(2) متتالية المجموعات $A_n=[0,n+1]$ متناقصة ونهايتها $[0,+\infty)$، بينما متتالية المجموعات $B_n=[n+1,+\infty)$ متزايدة ونهايتها ϕ.

(3) صف المجموعات القيوسة حسب لبيغ يشكل حلقة لكنه لا يشكل σ – جبر.

(4) إذا كانت $\{H_\alpha : \alpha\in I\}$ أسرة من الجبور على مجموعة X فإن التقاطع $\bigcap_{\alpha\in I} H_\alpha$ لا يشكل جبراً على X.

(5) كل مجموعة قيوسة حسب لبيغ يجب أن تكون محدودة.

(6) حتى تكون الدالة $f(x)$ قيوسة حسب لبيغ على المجموعة E يجب أن تكون $f(x)$ مستمرة.

مع التمنيات بالتوفيق والنجاح
حمص في 21 / 8 / 2013.

مدرس المادة: د. إبراهيم إبراهيم

جامعة البعث — سلم التصحيح لمادة نظرية القياس
كلية العلوم — السنة الثالثة رياضيات
قسم الرياضيات — الدورة الثالثة للعام الدراسي ٢٠١٢/٢٠١٣

السؤال الأول (٢٨ درجة):

~~نقول عن صف H انه نصف حلقة على X اذا تحقق ما يلي:~~

(أ) نصف الحلقة: يكون الصف H ...

1) $A, B \in H \Rightarrow A \cap B \in H$

2) $A, B \in H \Rightarrow \exists C_1, C_2, \dots, C_n \in H$; $C_i \cap C_j = \phi$ و $A \setminus B = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$

مثال: $H = \{[a,b) : -\infty < a < b < +\infty\} \cup \phi$

نصف الجبر: هو نصف حلقة فيها $X \in H$.
مثال: 2^X (يوجد غيره)

الحلقة: يكون H حلقة على X اذا تحقق ما يلي:

1) $A, B \in H \Rightarrow A \cup B \in H$

2) $A, B \in H \Rightarrow A \setminus B \in H$

مثال: 2^X (توجد أمثلة أخرى)

الجبر: هو حلقة فيها $X \in H$.

مثال: 2^X (توجد أمثلة أخرى).

(ب) لدينا هنا $H = 2^N$.

(1) لتكن $A_1, A_2, \dots \in H$ عندئذ $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in H$ لأنها ستكون مجموعة جزئية من N.

(2) لتكن $A, B \in H$ عندئذ $A \setminus B \in H$ لنفس السبب السابق
لذلك يكون H σ-حلقة على N.

وبما أن $N \in 2^N = H$ فيكون 2^N σ-جبر على N.

السؤال الثاني (٧ درجة)

ب

(٣) نفرض كل من $f(x)$ و $g(x)$ دوال بسيطة لأنها تأخذ قيم ثابتة على مجموعات جزئية من E، والتمثيل الطبيعي لها هو:

$$f(x) = 1\cdot I_{[0,1]}(x) + 2\cdot I_{(1,2)}(x) + 3\cdot I_{[2,4]}(x) + 0\cdot I_{(4,8)}(x) + 6\cdot I_{\{8\}}(x)$$

$$g(x) = 1\cdot I_{[0,1]}(x) + 2\cdot I_{(1,2]}(x) + 5\cdot I_{(2,8)}(x) + 6\cdot I_{\{8\}}(x).$$

(ب) حساب التكاملات:

$$\int_{[0,8]} f(x)\,d\lambda = 1\cdot\lambda([0,1]) + 2\cdot\lambda((1,2)) + 3\cdot\lambda([2,4]) + 0\cdot\lambda((4,8)) + 6\cdot\lambda(\{0\})$$

$$= 1(1) + 2(1) + 3(2) + 0 + 6(0) = 9.$$

$$\int_{[0,8]} g(x)\,d\lambda = 1\cdot\lambda([0,1]) + 2\cdot\lambda((1,2]) + 5\cdot\lambda((2,8)) + 6\cdot\lambda(\{8\})$$

$$= 1(1) + 2(1) + 5(6) + 6(0) = 33.$$

$$\int_{[0,8]} [f(x) + g(x)]\,d\lambda = \int_{[0,8]} f(x)\,d\lambda + \int_{[0,8]} g(x)\,d\lambda =$$

$$= 9 + 33 = 42.$$

السؤال الثالث (١٠ درجة):

أ) نقول عن خاصة P إنها محققة تقريباً في كل مكان على مجموعة E إذا:
- وجدت مجموعة جزئية $E_0 \subset E$ بحيث أن $\lambda(E_0)=0$
- P محققة على $E \setminus E_0$ وغير محققة على E_0.

ب) لدينا هنا
$$\begin{cases} E=\mathbb{R} \\ E_0=\mathbb{N} \\ P: = \end{cases}$$

$f(x)=g(x)=x^2 \; ; x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$

$f(x)=1\neq 10=g(x) \; ; x\in\mathbb{N}$

وبما أن $\lambda(\mathbb{N})=0$ فإن $f \overset{a.e}{=} g$

ج) لدينا هنا:
$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} x^n=\begin{cases} 0 \; ; 0\le x<1 \\ 1 \; ; x=1 \end{cases}$$

وبما أن $\lambda(\{1\})=0$ فإن $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{a.e} 0$.

السؤال الرابع (٤٠ درجة):

(١) خطأ: دالة ديرخليه كمولة حسب ليبيغ وغير كمولة حسب ريمان.

(٢) خطأ: المتتالية $\{A_n\}$ متزايدة ونهايتها $[0,+\infty)$ والمتتالية $\{B_n\}$ متناقصة ونهايتها ϕ.

(٣) خطأ: تشكل σ - جبر.

(٤) خطأ: التقاطع $\bigcap_{\alpha\in I} H_\alpha$ يشكل جبر.

(٥) خطأ: ليس بالضرورة، مثال دالة R قيوسة وغير محدودة.

(٦) خطأ: ليس بالضرورة، مثال: الدوال البسيطة قيوسة لكنها غير مستمرة.

مدرس المادة: د. ابراهيم ابراهيم

(١٢)

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الفصل الثاني العام الدراسي 2012 / 2013
المادة: نظرية القياس – السنة الثالثة رياضيات
العلامة: 100 درجة.
اسم الطالب: بتول

السؤال الأول (28 درجة):

(أ) اذكر تعريف كل من : الحلقة، الجبر ، σ– الحلقة ، σ– الجبر ، مع إعطاء مثال عن كل منها.

(ب) لتكن $X = N$ مجموعة الأعداد الطبيعية وليكن H صف المجموعات الجزئية في X المعدودة على الأكثر. أثبت أن H يشكل حلقة وجبر و σ – حلقة و σ – جبر على N.

السؤال الثاني (27 درجة):

لتكن الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ المعرفتين على المجموعة $E = [0,5)$ بالشكل:

$$f(x)=\begin{cases} 3 & ; \ 0\le x\le 1 \\ 2 & ; \ 1<x<2 \\ 1 & ; \ 2\le x\le 4 \\ 8 & ; \ 4<x<5. \end{cases} \quad , \quad g(x)=\begin{cases} \frac{1}{2} & ; \ 0\le x\le 1 \\ 1 & ; \ 1<x\le 3 \\ 4 & ; \ 3<x<5. \end{cases}$$

المطلوب : (أ) هل هذه الدوال بسيطة ؟ وإذا كان الجواب " نعم " اكتب التمثيل الطبيعي لها.

(ب) احسب التكاملات التالية :

$$\int_E f(x)dx \ , \ \int_E g(x)dx \ , \ \int_E [f(x)+g(x)]dx .$$

السؤال الثالث (21 درجة):

(أ) اذكر تعريف " الخاصة تقريبا في كل مكان ".

(ب) أثبت أن الدالتين التاليتين متساويتان تقريبا في كل مكان على R :

$$f(x)=x^2 \quad , \quad g(x)=\begin{cases} x^2 & ; \ x\in R\setminus N \\ 1 & ; \ x\in N. \end{cases}$$

(ج) لتكن متتالية الدوال $\{f_n(x)\}$ المعرفة على المجال $[0,1]$ بالشكل:

$$f_n(x)=x^n \quad ; \quad x\in[0,1] \ , \ n=1,2,\dots$$

أثبت أن هذه المتتالية متقاربة تقريبا في كل مكان من الدالة $f(x) = 0$.

السؤال الرابع (24 درجة):

أجب بكلمة صح أو خطأ وصحح الخطأ فيما يلي:

(1) دالة ديريخليه كمولة حسب ريمان وليست كمولة حسب ليبيغ.

(2) الصف $H = \{[a,b) : -\infty < a < b < +\infty\} \cup \phi$ يشكل نصف حلقة على R.

(3) متتالية المجموعات $A_n = [0,n+1]$ متزايدة ونهايتها $[0,+\infty)$ ، بينما متتالية المجموعات $B_n = [n+1,+\infty)$ متناقصة ونهايتها ϕ.

(4) إذا كانت $\{H_\alpha : \alpha\in I\}$ أسرة من الحلقات على مجموعة X فيكون $\bigcap_{\alpha\in I} H_\alpha$ حلقة على X ،

(5) مجموعة كانتور هي مجموعة عدودة وقياسها 1 .

(6) كل مجموعة قيوسة حسب ليبيغ يجب أن تكون محدودة أو عدودة .

(7) إذا كانت الدالة $f^2(x)$ قيوسة على المجموعة E فتكون الدالة $f(x)$ قيوسة على E أيضا.

(8) تنص توطئة فاتو على ما يلي:
إذا كانت $\{f_n(x)\}$ متتالية من الدوال القيوسة وغير السالبة على المجموعة E ، فيكون عندئذ :

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\,d\lambda = \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,d\lambda .$$

مع التمنيات بالتوفيق والنجاح
حمص في 3 / 7 / 2013.

مدرس المادة: د. إبراهيم إبراهيم

سلم التصحيح لمادة نظرية القياس - السنة الثالثة رياضيات ①

الفصل الثاني للعام الدراسي ٢٠١١/٢٠١٢

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

السؤال الأول (٢٨ درجة): فيما يلي نرمز X لمجموعة ما و H صف جزئي من 2^X:

(أ) الحلقة: الصف H يشكل حلقة من X إذا تحقق الشرطان التاليان

$$A\cup B\in H,\ A\setminus B\in H\ ;\ \forall A,B\in H.$$

الجبر: هو حلقة فيها $X\in H$.

σ-الحلقة: الصف H يشكل σ-حلقة من X إذا تحقق الشرطان التاليان:

1) $A\setminus B\in H\ ;\ \forall A,B\in H$

2) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\in H\ ;\ \forall A_i\in H,\ i=1,2,\dots$

σ-الجبر: هو σ-حلقة فيها $X\in H$.

مثال (يصلح لكل الحالات): $H=2^X$ --- طبعاً توجد أمثلة أخرى.

(ب) ليكن H صف المجموعات الجزئية المعدودة على الأكثر من $\mathbb{N}$.

H يشكل حلقة لأن: اجتماع وفرق مجموعتين معدودتين على الأكثر هو من جديد مجموعة معدودة على الأكثر، أي أن

$$A\cup B\in H,\ A\setminus B\in H\ ;\ \forall A,B\in H.$$

H يشكل جبر لأن: H حلقة و $\mathbb{N}\in H$ لأن $\mathbb{N}$ معدودة.

H يشكل σ-حلقة لأن: فرق مجموعتين معدودتين على الأكثر هو مجموعة معدودة على الأكثر، أي أن $A\setminus B\in H$ أيا كان $A,B\in H$.

كما أن اجتماع عدد معدود لمجموعات معدودة على الأكثر هو مجموعة معدودة، أي:

$$\forall A_1,A_2,\dots\in H \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in H$$

H يشكل σ-جبر لأن: H يشكل σ-حلقة و $\mathbb{N}\in H$.

السؤال الثاني (٢٧ درجة)

(أ) نعم: $f(x)$ و $g(x)$ دوال بسيطة، والتمثيل الطبيعي لها هو:

$$f(x) = 3\, I_{[0,1]}(x) + 2\, I_{(1,2)}(x) + 1\, I_{[2,4]}(x) + 8\, I_{(4,5)}(x).$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\, I_{[0,1]}(x) + 1\, I_{(1,3]}(x) + 4\, I_{(3,5)}(x).$$

(ب)

$$\int_E f(x)\,d\lambda = 3\cdot\lambda([0,1]) + 2\cdot\lambda((1,2)) + 1\cdot\lambda([2,4]) + 8\cdot\lambda((4,5))$$
$$= 3\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 8\cdot 1 = 15;$$

$$\int_E g(x)\,d\lambda = \frac{1}{2}\lambda([0,1]) + 1\cdot\lambda((1,3]) + 4\cdot\lambda((3,5));$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 1 + 1\cdot 2 + 4\cdot 2 = \frac{21}{2}.$$

$$\int_E [f(x)+g(x)]\,d\lambda = \int_E f(x)\,d\lambda + \int_E g(x)\,d\lambda = 15 + \frac{21}{2} = \frac{51}{2}.$$

السؤال الثالث (١٢ درجة):

(أ) نقول إن الخاصة P محققة تقريباً في كل مكان من المجموعة E إذا كان:

- توجد مجموعة جزئية $E_0 \subset E$ بحيث $\lambda(E_0)=0$

- الخاصة P محققة من $E \setminus E_0$ وغير محققة من E_0.

(ب) هنا $E_0 = \mathbb{N}$ وبالتالي $\lambda(E_0)=\lambda(\mathbb{N})=0$.

$$f(x) = g(x) = x^2 \quad ;\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$$

$$f(x) \neq g(x) \quad ;\ x \in \mathbb{N}.$$

(جـ) لدينا هنا:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & ;\ 0 \le x < 1 \\ 1 & ;\ x = 1 \end{cases}$$

السؤال الرابع (٢٤ درجة) :

(١) خطأ : الصحيح هو : دالة ديريخليه مكاملة حسب ليبيغ وليست مكاملة حسب ريمان .

(٢) صح .

~~(٣) صح~~

(٤) صح .

(٥) خطأ : الصحيح هو : مجموعة كانتور غير معدودة وقياسها يساوي صفر

(٦) خطأ : ليس بالضرورة ، مثلاً : $\mathbb{R}$ مجموعة قيوسة حسب ليبيغ لكنها غير محدودة وغير معدودة .

(٧) خطأ : الصحيح هو : اذا كانت $f^2(x)$ قيوسة فليس بالضرورة أن تكون $f(x)$ قيوسة (يمكنه إعطاء مثال أيضاً) .

(٨) خطأ : الصحيح هو : كتابة المتراجحة " $\geq$ " بدلاً " = " .

مدرس المادة : د. ابراهيم ابراهيم

جامعة البعث　　امتحانات الفصل الأول للعام الدراسي 2013 / 2014

كلية العلوم　　المادة : نظرية القياس – السنة الثالثة رياضيات

قسم الرياضيات　　العلامة : 100 درجة – المدة: ساعتين --　　اسم الطالب:

مقبول

السؤال الأول (24 درجة) : ٦ × ٤ = ٢٤

حدد العبارات الصحيحة والعبارات الخاطئة فيما يلي وصحح الخاطئة منها :

✓ (1) دالة ديريكلية كمولة حسب ليبيغ وغير كمولة حسب ريمان .

✗ (2) الصف $H=\{[a,b):-\infty<a<b<+\infty\}\cup\phi$ يشكل σ – جبر على R .

✓ (3) قياس ليبيغ في R σ – منته .

✓ (4) قياس ليبيغ للمجالات (a,b) ، $[a,b]$ ، $[a,b)$ هو العدد $b-a$.

✓ (5) اذا كانت $f(x)$ دالة قيوسة على المجموعة R فتكون $f^2(x)$ قيوسة أيضاً .

✗ (6) كل حلقة هي جبر .

السؤال الثاني (28 درجة) : ٥ × ٤ = ٢٠

احسب قياس كل من المجموعات التالية وذلك بحسب قياس ليبيغ ، وقياس العد ، والقياس الصغري :

$A=\{2,4,6,....\}$, $B=N$, $C=R\setminus N$, $D=[1,15]$, $E=(-\infty,-1]$.

السؤال الثالث (24 درجة) :

(أ) عرف الخاصة " تقريباً في كل مكان " .

(ب) أثبت أن الدالتين التاليتين متساويتان تقريباً في كل مكان على R :

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & ; \ x\in R\setminus N\\ 0 & ; \ x\in N\end{cases}\quad , \quad g(x)=\begin{cases}\sin x & ; \ x\in R\setminus N\\ x & ; \ x\in N.\end{cases}$$

(ج) أثبت أن المتتالية $\{f_n(x)\}$ المعرفة على المجال $[0,1]$ بالشكل:

$$f_n(x)=\begin{cases}x^n & ; \ x\in[0,1)\\ 1 & ; \ x=1\end{cases}\quad ; \quad n=1,2,....$$

متقاربة تقريباً في كل مكان من الدالة $f(x)=0$ على المجال $[0,1]$.

السؤال الرابع (24 درجة) :

(أ) عرف تكامل ليبيغ لكل من : الدالة البسيطة غير السالبة – الدالة القيوسة غير السالبة .

(ب) لتكن الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ المعرفتين على المجموعة $E=[3,16)$ بالشكل :

$$f(x)=\begin{cases}1 & ; \ 3\le x\le 10\\ 0 & ; \ x=10\\ 3 & ; \ 10<x<16\end{cases}\quad , \quad g(x)=\begin{cases}5 & ; \ 3\le x\le 10\\ 1 & ; \ 10<x<16.\end{cases}$$

احسب تكاملات ليبيغ التالية :

$$\int_E f(x)d\lambda \quad , \quad \int_E g(x)d\lambda \quad , \quad \int_E [f(x)+g(x)]d\lambda \quad .$$

انتهت الأسئلة

حمص في 16/ 1 /2014 .　　مع التمنيات بالنجاح والتوفيق . د. إبراهيم إبراهيم

٣٠٣ ريض ... نظرية القياس
سنة ٢ رياضيات
الفصل الأول للعام الدراسي ٢٠١٢ / ٢٠١٤

كلية العلوم
قسم الرياضيات

السؤال الأول (٢٤ درجة):

٦ × ٤ن = $\boxed{٢٤ن}$

(١) صح

(٢) خطأ: الصف H لا يشكل σ-جبر (بل لا يشكل جبر) لأن اجتماع أي عنصرين منه ليس بالضرورة ينتمي إليه، مثال $(0,1]\cup[2,3)\notin H$.

(٣) صح

(٤) صح

(٥) صح

(٦) خطأ: كل جبر هو حلقة.

السؤال الثاني (٢٨ درجة):

المجموعة	قياس ليبيغ $\boxed{١٠ن}$ = ٢ × ٥ن	قياس العد $\boxed{١٠ن}$ = ٢ × ٥ن	القياس الصفري $\boxed{٨ن}$
$A=\{2,4,6,\dots\}$	0	∞	0
$B=\mathbb{N}$	0	∞	0
$C=\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$	∞	∞	0
$D=[1,15]$	14	∞	0
$E=(-\infty,-1]$	∞	∞	0

السؤال الثالث (٢٤ درجة):

(أ) نقول عن خاصة P إنها محققة تقريباً في كل مكان من المجموعة القيوسة E $\boxed{٤ن}$ إذا وفقط إذا:

- توجد في E مجموعة جزئية $E_0\subset E$ قيوسة وقياسها صفر $\lambda(E_0)=0$
- الخاصة P محققة في $E\setminus E_0$.

$$f(x)=g(x)=\sin x \quad ; x\in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$$

$$f(x)\neq g(x) \quad ; x\in\mathbb{N}$$

$$\lambda(\mathbb{N})=0$$

لذلك يكون $f\overset{ae}{=}g$.

(ج)

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\begin{cases}0 & ; \ x\in(0,1)\\ 1 & ; \ x=1\end{cases}$$

وبما أن $\lambda(\{1\})=0$ فإن $\lim_{n\to\infty} f_n(x)\overset{ae}{=}0$.

السؤال الرابع (٤٠ درجة):

(أ) تكامل ليبيغ للدالة البسيطة وغير السالبة $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i\cdot I_{A_i}(x)$ هو

$$\int_E \varphi(x)\,d\lambda=\sum_{i=1}^{n} a_i\cdot\lambda(A_i)$$

تكامل ليبيغ للدالة القيوسة وغير السالبة $f(x)$ هو:

$$\int_E f(x)\,d\lambda=\lim_{n\to\infty}\int_E \varphi_n(x)\,d\lambda \,,$$

حيث $\{\varphi_n(x)\}$ متتالية متزايدة من الدوال البسيطة وغير السالبة والمتقاربة على E من الدالة $f(x)$.

(ب) حساب التكاملات:

$$\int_E f(x)\,d\lambda = 1\cdot\lambda([3,10])+0\cdot\lambda(\{10\})+3\cdot\lambda((10,16])$$
$$=1\cdot 7+0+3\cdot 6=25 .$$

$$\int_E g(x)\,d\lambda = 5\cdot\lambda([3,10])+1\cdot\lambda((10,16])$$
$$=5\cdot 7+1\cdot 6=41$$

$$\int_E [f(x)+g(x)]\,d\lambda=\int_E f(x)\,d\lambda+\int_E g(x)\,d\lambda=25+41=66$$

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الفصل الأول للعام الدراسي 2012 / 2013
المادة : نظرية القياس – السنة الثالثة رياضيات
العلامة: 100 درجة – المدة: ساعتين _ اسم الطالب:

السؤال الأول (24 درجة):
حدد العبارات الصحيحة والعبارات الخاطئة فيما يلي وصحح الخاطئة :

(1) كل من المجالات (a,b) ، $(a,b]$ ، $[a,b)$ ، $[a,b]$ عبارة عن مجموعة بوريلية في R .

(2) القياس لوبيغ للمجالات (a,b) ، $(a,b]$ ، $[a,b)$ ، $[a,b]$ هو العدد $b-a$.

(3) القياس هو دالة مجموعة $\mu : H \longrightarrow [0,+\infty]$ تحقق الشرطين :

(أ) $\mu(\phi)=0$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i) \quad ; A_i \in H. \quad (ب)$$

(4) قياس العد هو قياس منته .

(5) الصف 2^X لا يشكل جبر على X .

(6) قياس لوبيغ لأية مجموعة غير منتهية يساوي $+\infty$.

(7) القياس الخارجي هو دالة مجموعة $\mu^* : 2^X \longrightarrow [0,+\infty]$ تحقق الشرط:

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(A_i) \quad ; A_i \in 2^X.$$

(8) الدالة المستمرة على مجموعة تكون قيوسة دوماً .

السؤال الثاني (30 درجة):
(أ) عرف كلاً من : جبر بوريل ، المجموعة القيوسة ، الدالة القيوسة .
(ب) اذكر أربع مجموعات بوريلية في R .
(ج) هل الدالة $f(x)=x^2$ قيوسة حسب لوبيغ على R .

السؤال الثالث (20 درجة):
(أ) عرف الخاصة " تقريباً في كل مكان " .
(ب) أثبت أن الدالتين التاليتين متساويتان تقريباً في كل مكان على R :

$$f(x)=x+1 \quad , \quad g(x)=\begin{cases} x+1 & ; \ x\in R\setminus N \\ n & ; \ x=n\in N. \end{cases}$$

السؤال الرابع (26 درجة):
(أ) عرف تكامل لوبيغ لكل من: الدالة البسيطة غير السالبة – الدالة القيوسة غير السالبة .
(ب) احسب تكامل لوبيغ للدالتين التاليتين (على المجال المرافق) :

$$f(x)=\begin{cases} 1 & ; \ 0\le x\le 2 \\ 2 & ; \ 2<x\le 5 \\ 5 & ; \ x=5 \end{cases} \quad , \quad g(x)=\begin{cases} 1 & ; \ -1\le x\le +1 \\ 0 & ; \ +1<x<+3 \\ 10 & ; \ +3\le x\le +6. \end{cases}$$

انتهت الأسئلة

حمص في 31 / 1 / 2013 .
مع التمنيات بالنجاح والتوفيق . د. إبراهيم إبراهيم

[illegible]

كلية العلوم — امتحانات الفصل الأول للعام الدراسي ٢٠١٤ / ٢٠١٣

قسم الرياضيات

السؤال الأول (٤٠ درجة):

(١) ~~صح~~ (٢) صح (٣) صح (٤) خطأ: قياس العد ليس قياس منتهٍ

(٥) خطأ: 2^X يشكل جبر على X.

(٦) خطأ: توجد مجموعات غير منتهية وقياس ليبيغ لها منتهٍ مثل المجال $[0,1]$ فهي مجموعة غير منتهية وقياس ليبيغ له $1 = 0 - 1$.

(٧) خطأ: القياس الخارجي هو دالة مجموعة $H \longrightarrow [0,\infty]$: μ^* تحقق: (H محققة)

1) $\mu^*(\phi) = 0$

2) $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) \;;\; A_i \in H ,\ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in H$;

(٨) صح.

السؤال الثاني (٢٠ درجة):

(أ) جبر بوريل على X: هو σ - الجبر المولد بصف المجموعات المفتوحة في X

وهي المجموعة القيوسة E هي التي تحقق:

$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \;;\; \forall A \in 2^X$

الدالة القيوسة: تكون الدالة f قيوسة على E إذا كانت (أحد) المجموعات التالية قيوسة من أجل أي عدد حقيقي:

$E(f > c)$, $E(f < c)$, $E(f \ge c)$, $E(f \le c)$.

(ب) مجموعات بوريلية: ϕ, N, Z, R, Q ، أي مجال ... إلخ.

(ج) الدالة $f(x) = x^2$ مستمرة على R فهي قيوسة حسب ليبيغ. (يمكن تطبيق التعريف لإثبات أن هذه الدالة قيوسة).

(ج) نقول عن خاصية P إنها محققة تقريباً في كل مكان على المجموعة المقيسة E إذا وجدت مجموعة جزئية $E_0 \subset E$ بحيث $\lambda(E_0)=0$

الخاصية P غير محققة على E_0

الخاصية P محققة على $E \setminus E_0$

(ب) لدينا:

$$f(x)=g(x) \quad ; \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$$

$$f(x) \neq g(x) \quad ; x \in \mathbb{N}$$

$$\lambda(\mathbb{N})=0$$

لذلك $f \overset{a.e.}{=} g$.

السؤال الرابع (٦×٢ درجة)

(أ) تكامل ليبيغ للدالة البسيطة ومقياس لبغ $\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot I_{A_i}(x)$ هو:

$$\int_E \varphi(x)\,d\lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \lambda(A_i).$$

تكامل ليبيغ للدالة المقيسة ومقياس لبغ $f(x)$ هو:

$$\int_E f(x)\,d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_E \varphi_n(x)\,d\lambda$$

حيث $\{\varphi_n(x)\}$ متتالية متزايدة من الدوال البسيطة ومقياس لبغ والتقارب على E من الدالة $f(x)$.

(ب) لتكن:

$$f(x) = 1\cdot I_{[0,2]}(x) + 2\, I_{(2,5)}(x) + 5\, I_{\{5\}}(x)$$

$$g(x) = 1\cdot I_{[-1,+1]}(x) + 0\, I_{(+1,+3)}(x) + 10\, I_{[+3,+6]}(x)$$

فيكون التكامل هو:

$$\int_{[0,5]} f(x)\,d\lambda = 1\cdot\lambda([0,2]) + 2\lambda((2,5)) + 5\lambda(\{5\}) = 1(2)+2(3)+5(0) = 8$$

$$\int g(x)\,d\lambda = 1\cdot\lambda([-1,+1]) + 0\,\lambda((+1,+3)) + 10\,\lambda([+3,+6]) = 1(2) + 0(2) + 10(3) = 32.$$